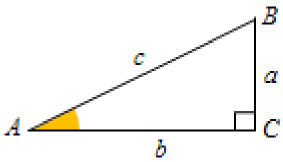
Tema 8 (I). Resolución de triángulos. Aplicaciones Resumen

Resolver un triángulo es determinar sus seis elementos (la longitud de sus tres lados y la amplitud de sus tres ángulos) a partir de sólo tres de ellos, uno de los cuales ha de ser un lado.

Resolver un triángulo rectángulo consiste en hallar las medidas de sus elementos (lados y ángulos) desconocidos.
Para ello nos valemos de las siguientes relaciones:



- Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$
- Los ángulos agudos son complementarios: $A + B = 90^{\circ}$
- Las razones trigonométricas seno, coseno y tangente, que valen:

$$\text{sen } A = \frac{a}{c} = \cos B;\quad \cos A = \frac{b}{c} = \text{sen } B;\quad \text{tag } A = \frac{a}{b};\quad \text{tag } C = \frac{b}{a}$$

Puede observarse que *el seno de un ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario.*

En un triángulo rectángulo se conoce siempre el valor del ángulo recto. El triángulo queda determinado cuando se conoce, además, al menos, dos de sus elementos, uno de los cuales ha de ser un lado.

Caso 1: Se conoce un lado y un ángulo agudo
Si se conocen A y a, entonces:

1) De $\text{sen } A = \dfrac{a}{c} \Rightarrow c = \dfrac{a}{\text{sen } A}$; 2) De $A + B = 90^{\circ} \Rightarrow B$; 3) De $\text{sen } B = \dfrac{b}{c} \Rightarrow b$. (O Pitágoras)

Ejemplo:
En el triángulo rectángulo ABC se sabe que $A = 40^{\circ}$ y $a = 12$ metros.

1) De $\text{sen } 40^{\circ} = \dfrac{12}{c} \Rightarrow 0{,}6428 = \dfrac{12}{c} \Rightarrow c = 18{,}67$ m.

2) De $A + B = 90^{\circ} \Rightarrow B = 50^{\circ}$; 3) De $\text{sen } 50^{\circ} = \dfrac{b}{18{,}67} \Rightarrow b = 18{,}67 \cdot \text{sen } 50^{\circ} = 14{,}30$ m.

Caso 2: Se conocen dos lados

- Si se conocen a y b, entonces:

1) De $\text{tag } A = \dfrac{a}{b} \Rightarrow A$, aplicando la tecla $\boxed{\tan^{-1}}$ al valor $\dfrac{a}{b}$.

2) Se procede como en el caso 1.

- Si se conocen a y c, se aplica Pitágoras para conocer b; después se procede como antes.

También puede aplicarse $\text{sen } A = \dfrac{a}{c} \Rightarrow A$, aplicando la tecla $\boxed{\sin^{-1}}$ al valor $\dfrac{a}{b}$; y se procede como antes.

Ejemplo:
En el triángulo rectángulo ABC se sabe que $a = 10$ m y $b = 14$ metros.

1) De $\text{tag } A = \dfrac{10}{14} = 0{,}7143 \Rightarrow A = \tan^{-1}(0{,}7143) = 35{,}54^{\circ}$.

2) Luego, $B = 90^{\circ} - 35{,}54^{\circ} = 54{,}46^{\circ}$.

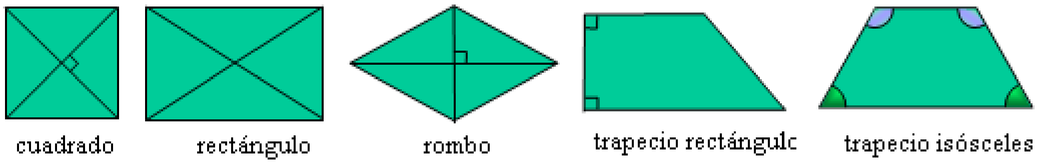
3) $c^2 = 10^2 + 14^2 \Rightarrow c = \sqrt{296} = 17{,}20$ m.

Aplicaciones
Pueden resolverse, a partir del conocimiento de los valores adecuados, todo tipo de problemas métricos (cálculo de longitudes y áreas) de figuras que puedan descomponerse en triángulos rectángulos. Entre otras figuras, se pueden indicar:

- Triángulos isósceles y equiláteros.
- Cuadrados, rectángulos, rombos y algunos trapecios.
- Polígonos regulares y su relación con las circunferencias inscrita y circunscrita.

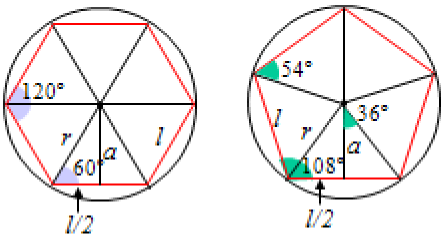
En triángulos isósceles y equiláteros:
La altura de un triángulo siempre es perpendicular a la base; por tanto, al trazar la altura siempre se obtienen dos triángulos rectángulos.
En el caso de un triángulo isósceles la altura cae en la mitad de la base y los triángulos obtenidos son iguales.

En paralelogramos:
En los casos del cuadrado, el rectángulo y el rombo debe tenerse en cuenta que las diagonales se cortan en su punto medio. Además, las diagonales del cuadrado y del rombo se cortan formando un ángulo recto (de 90º).



En algunos trapecios
Si el trapecio es rectángulo o isósceles es posible determinar distancias y áreas a partir de algunos valores conocidos.

En polígonos regulares
Conociendo el valor del lado se puede obtener su área y los radios de las circunferencias inscritas y circunscritas. Para ello habrá que determinar el valor de uno de sus ángulos, y trazar un radio y una apotema.
En el caso de un hexágono o de un pentágono se obtiene los datos que se indican en la figura adjunta.



En circunferencias
Hay algunas propiedades que pueden aplicarse: Por ejemplo:
1) Cualquier cuerda de una circunferencia determina con los radios correspondientes a sus extremos un triángulo isósceles, con vértice en su centro.
2) La hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo es el diámetro de la circunferencia circunscrita a él.